数理解析研究所講究録
第 1762 巻 2011 年 46-55

Locally maximal invariant set at a fixed indeterminate point

Tomoko Shinohara [1]
Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology
E-mail address: sinohara@s.metro-cit.ac.jp

篠原 知子
東京都立産業技術高等専門学校

1. Introduction.

この報告では，複素 3 次元射影空間 $\mathbf{P}^3$ 上の有理写像 F の固定的不定点 p における局所的な力学系構造の考察を行う．特に blow up を使って，p において F により不変な曲面 V を構成する．

第 2 章では，記号と用語を準備し，これまでに得られた複素 2 次元射影空間 $\mathbf{P}^2$ 上の結果を紹介する．第 3 章では，2 次元の結果を $\mathbf{P}^3$ のある開集合上の有理型写像 F で不定点集合 I の次元が 1 の場合に拡張する．特に，ある条件を満たす有理写像 F に対し，I を含み，F により不変な曲面 V が存在することを示す．

2. 2 次元の場合のまとめ

この章では記号と用語を用意し，これまでに得られた 2 次元の場合の結果を紹介する．詳しくは [2] を参照して欲しい．

$f_i(x_1, x_2, x_3)(i = 0, 1, 2)$ を次数 d の斉次多項式，$F : [x_1 : x_2 : x_3] \mapsto [f_0 : f_1 : f_2]$ を $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像，$G : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (f_0, f_1, f_2)$ を $\mathbf{C}^3$ 上の多項式写像とする．このとき，$\tilde{\pi} \circ G = F \circ \tilde{\pi}$ が $\mathbf{C}^3$ からある解析的集合を除いたところで成立する．ここで，$\tilde{\pi} : \mathbf{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbf{P}^2$ は標準的射影とする．$G(\tilde{p}) = (0,0,0)$ がある点 $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ に対して成り立つとき，点 $p \in \mathbf{P}^2$ は F の不定点であるという．一般に，p が不定点であるとき，$\bigcap_{U_p} \overline{F(U_p \setminus \{p\})}$ は一点にならない．ただし U_p は p の任意の開集合とする．これより，F は点 p で不連続であることに注意する．不定点 p が $p \in \bigcap_{U_p} \overline{F(U_p \setminus \{p\})} \cdots (*1)$ を満たすとき固定的不定点とよぶことにする．固定的不定点は連続写像の不動点の定義を拡張したものである．特に，p の任意の近傍 U_p に対し，$F(U_p \setminus \{p\}) \cap U_p \neq \emptyset$ が成り立つことから，固定的不定点においては，不動点と同様に局所的な力学系構造の存在が期待できる．

[1] This research is supported by MEXT Grant-in-Aid for Young Scientists(B) No. 22740113.

この章では $\mathbf{P}^2$ の有理写像 $F:\mathbf{P}^2\to\mathbf{P}^2$ は点 $p=[0:0:1]$ を不定点に持つとする．$\mathbf{P}^2$ の部分集合 $\{[x_1:x_2:x_3]\in\mathbf{P}^2 \mid x_3\neq 0\}$ を

$$[x_1:x_2:x_3]\mapsto(x_1/x_3,x_2/x_3)$$

により，今後局所座標近傍 $\mathbf{C}^2$ と同一視する．この座標で点 p は原点 $p=(0,0)$ となることに注意する．$\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1$ の部分集合 X を次の様に定義する．

$$X:=\Big\{(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\in\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1 \mid x_1l_2-x_2l_1=0\Big\}.$$

このとき，X は次の 2 つの座標近傍系 $\{(U^j,\mu^j)\}_{j=1,2}$ により $\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1$ の部分多様体となることが定義より直ちにわかる．

$$U^1:=\Big\{(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\in X \;\Big|\; l_1\neq 0,\quad x_2=\frac{l_2}{l_1}x_1\Big\},$$

$$\mu^1:U^1\to\mathbf{C}^2,(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\mapsto\Big(x_1,l_2/l_1\Big),$$

$$U^2:=\Big\{(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\in X \;\Big|\; l_2\neq 0,\quad x_1=\frac{l_1}{l_2}x_2\Big\},$$

$$\mu^2:U^2\to\mathbf{C}^2,(x_1,x_2)\times[l_1:l_2]\mapsto\Big(l_1/l_2,x_2\Big).$$

Definition 1. ([1]). 第一成分への射影 $\mathbf{C}^2\times\mathbf{P}^1\to\mathbf{C}^2$ の X への制限を $\pi:X\to\mathbf{C}^2$ とする．この写像 π を，$p=(0,0)$ を中心とする $\mathbf{C}^2$ の **blow up** と定義する．また，X の部分集合 $E:=\pi^{-1}(p)=\{p\}\times\mathbf{P}^1$ を π の除外曲線と呼ぶ．

ここで，$\pi:X\setminus E\to\mathbf{C}^2\setminus\{p\}$ は双正則写像であることに注意しておく．

固定的不定点における局所的な力学系構造の研究は Y. Yamagishi ([3],[4]) により始められた．本研究はこの結果を基にしているので，ここではそれを紹介する．まず，合成写像 $\tilde{F}:=F\circ\pi:X\to\mathbf{P}^2$ を定義し，$\tilde{F}$ が次の条件を満たすと仮定する．

$$(A.0)\begin{cases}\tilde{F} \text{ は } E \text{ のある近傍上正則であり，} \tilde{F}^{-1}(p)\cap E=\{p_1,p_2\} \text{ である．}\\ \text{点 } p_i \text{ のある開近傍 } N_i \text{ が存在し，} \tilde{F} \text{ は } N_i \text{ 上双正則写像となる．}\end{cases}$$

ただし $i=1,2$ とする．条件 $(A.0)$ を仮定すると，点 p は F の固定的不定点になることに注意する．[3],[4] では更に，$\tilde{F}$ が N_i 上，ある方向に縮小的であると仮定した．この条件の下，点 p を通る 1 次元複素多様体 W_{j} の族で構成される，点 p の局所安定集合 $\{W_{\mathrm{j}}\}_{\mathrm{j}\in\{1,2\}^{\mathrm{N}}}$ が存在することを示した．この集合族はカントールブーケと呼ばれる．2 変数正則写像の場合，鞍型不動点には 1 つの 1 次元複素多様体で

ある局所安定多様体が存在する．一方，カントールブーケは有理写像の不定点を通る非加算無限個の正則曲線の族からなり，より複雑な力学系構造を持っている．[2]ではカントールブーケの定義を拡張した次の様な曲線族を考察した．

Definition 2. ([2]). 点 p を通る曲線の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次を満たすとき，F により点 p で局所的に不変であるという．

(1) ある正則関数の族 $\phi_\lambda : \Delta_{\rho_\lambda} \to \mathbf{C}$ で

$$W_\lambda = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2 \;\middle|\; x_2 = \phi_\lambda(x_1),\ x_1 \in \Delta_{\rho_\lambda}\right\},\ \phi_\lambda(0) = 0$$

を満たすものが存在する．但し $\Delta_{\rho_\lambda} := \left\{x_1 \in \mathbf{C} \;\middle|\; |x_1| < \rho_\lambda\right\}$ で $W_\lambda \ni p$ である．

(2) 任意の曲線 W_λ に対し，ある $\lambda' \in \Lambda$ と点 p のある開近傍 $N_{\lambda'}$ が存在し，次が成り立つ:

任意の $x_1 \in \Delta^*_{\rho_\lambda}$ に対し，$F(x_1, \phi_\lambda(x_1)) \cap N_{\lambda'} \subset W_{\lambda'}$，$\lim_{x_1\to 0} F(x_1, \phi_\lambda(x_1)) = p.$

但し，$\Delta^*_{\rho_\lambda} := \Delta_{\rho_\lambda} \setminus \{0\}$ とする．

以上の準備の下，これまでに得た $\mathbf{P}^2$ 上の有理写像の不定点に関する結果を述べる．F が条件 (A.0) を満たすとき次の主張が成り立つ．

$$(A.1)\begin{cases} (1)\ F_0 := \pi^{-1}\circ\tilde{F} \text{ は } N(E) \text{ 上の有理型写像であり，点 } p_1, p_2 \text{ は } F_0 \text{ の} \\ \qquad\text{不定点である．} \\ (2)\ \tilde{F}_{j_1}|_{E_{j_1}} : E_{j_1} \to E \text{ は全単射であり，} p_{j_1j_2} := \tilde{F}_{j_1}^{-1}(p_{j_2}) \in E_{j_1} \\ \qquad\text{とおくことができる．更にこのとき，点 } p_{j_1j_2} \text{ のある開近傍 } N_{j_1j_2}\text{が} \\ \qquad\text{存在し，} \tilde{F}_{j_1} \text{ は } N_{j_1j_2} \text{ 上双正則写像となる．} \end{cases}$$

但し，$N(E)$ は除外曲線 E のある開近傍，$\pi_{j_1} : X_{j_1} \to X$ は点 p_{j_1} を中心とする X の blow up，E_{j_1} は X_{j_1} の除外曲線，$\tilde{F}_{j_1} := F_0 \circ \pi_{j_1} : X_{j_1} \to X$ とする．

Theorem 1. ([2]). この過程を帰納的に繰り返して，blow up $\pi_{j_1\cdots j_{n+1}} : X_{j_1\cdots j_{n+1}} \to X_{j_1\cdots j_n}$ の列を定義することができ，任意の記号列 $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots) \in \{1,2\}^{\mathbf{N}}$ に対し，点列 $p_{j_1\cdots j_{n+1}} \in X_{j_1\cdots j_n}$ を得ることができる．

Theorem 1 については図 1 を見て欲しい．次の集合を，不定点 p のある近傍 N_p^n の局所最大不変集合という．

$$\Gamma := \bigcap_{k\geq 0}^{\infty} F^{-k}(N_p^n) \cap N_p^n$$

点列 $p_{j_1\cdots j_n}$ を用いて，Γ を特徴づけることができる．

Theorem 2. 任意の $n\in\mathbf{N}$ と点 p の十分小の任意の近傍 N_p^n に対し，点 $p_{j_1\cdots j_n}$ の開近傍 $N_{j_1\cdots j_n}$ で次を満たすものが存在する．

(1) $F^{-n}(N_p^n)\cap N_p^n=\bigcup_{j_i\in\{1,2\}}\pi\circ\pi_{j_1}\circ\cdots\pi_{j_1\cdots j_{n-1}}(N_{j_1\cdots j_{n-1}})\cap N_p^n$,

(2) $\Gamma\subset F^{-n}(N_p^n)\cap N_p^n=\bigcup_{j_i\in\{1,2\}}\pi\circ\pi_{j_1}\circ\cdots\pi_{j_1\cdots j_{n-1}}(N_{j_1\cdots j_n})\cap N_p^n$.

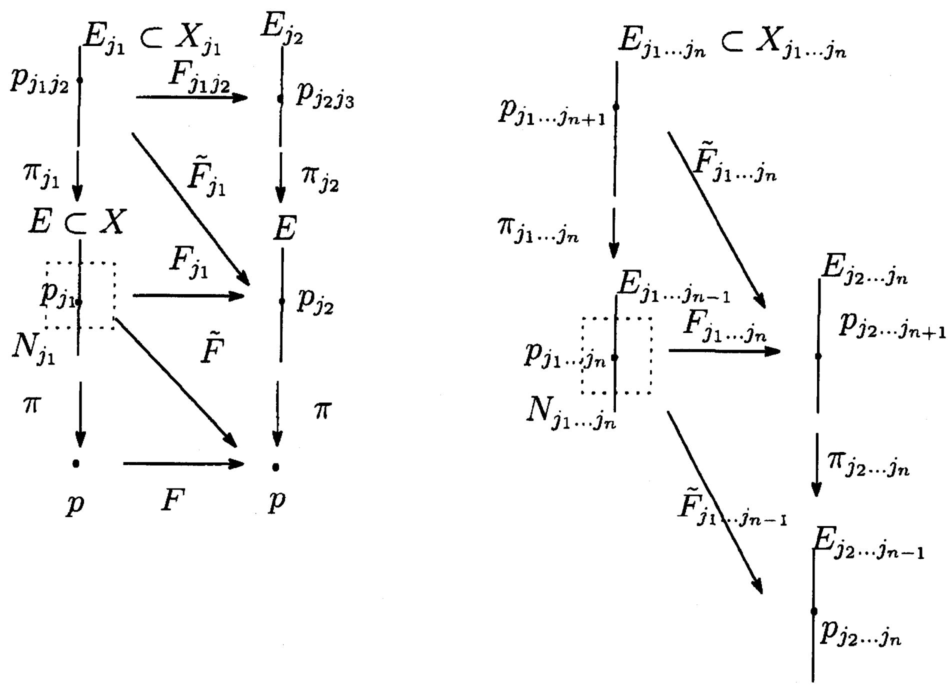

図 1.

Remark. (2) の主張より，N_p^n の局所最大不変集合 Γ が点 p を通る 2^n 個の部分集合の族により外側から近似されることがわかる．

議論を進めるために，次の条件 (B) を更に仮定する．

$$(B)\ \text{任意の}\ n\in\mathbf{N}\ \text{に対し}\ p_{j_1\cdots j_n}\in U^1_{j_1\cdots j_{n-1}},$$

ただし $U^1_{j_1\cdots j_{n-1}}$ は X の座標近傍 U^1 と同様に定義した，$X_{j_1\cdots j_{n-1}}$ の座標近傍とする．$U^1_{j_1\cdots j_{n-1}}$ の座標を用いて，$p_{j_1\cdots j_n}=(0,\alpha_{j_1\cdots j_n})$ とおく．点列 $\{\alpha_{j_1\cdots j_n}\}$ を用いて，任意の記号列 $\mathbf{j}\in\{1,2\}^{\mathbf{N}}$, $\mathbf{j}=(j_1,j_2,\ldots)$ に対し，形式的べき級数

$$x_2=\phi_{\mathbf{j}}(x_1):=\alpha_{j_1}x_1+\alpha_{j_1j_2}x_1^2+\cdots,$$

と記号列の空間

$$J := \left\{ \mathbf{j} \in \{1,2\}^{\mathbf{N}} \mid \rho_{\mathbf{j}} > 0 \right\}, \text{ ただし } \rho_{\mathbf{j}} \text{ は } \phi_{\mathbf{j}} \text{ の収束半径,}$$

と任意の $\mathbf{j} \in J$ に対して $\phi_{\mathbf{j}}$ のグラフ

$$V_{\mathbf{j}} := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2 \mid x_2 = \phi_{\mathbf{j}}(x_1),\ x_1 \in \Delta_{\rho_{\mathbf{j}}} \right\}$$

を定義する．このとき，次の結果を得る．

Theorem 3. ([2]). $\{V_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j} \in J}$ は F により p で局所的に不変な最大の曲線族である．ここで，最大の族であるとは，任意の F により p で不変な曲線族 $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \{V_{\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j} \in J}$ が成り立つこととする（この包含関係は連続曲線の芽の意味とする）.

3. 3 次元の場合.

$\mathbf{C}^3$ の原点を $p := (0,0,0)$ とおき，点 p のある開近傍を U, x_1 軸を

$$I := \{(x_1, x_2, x_3) \in U \mid x_2 = x_3 = 0\}$$

とおく．これより先，F は $F : U \to \mathbf{P}^3$ の有理型写像で I を不定集合に持つとする．2 次元の場合と同様に，$U \times \mathbf{P}^1$ の部分集合 X_1 を

$$X_1 := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in U \times \mathbf{P}^1 \mid x_3 l_2 - x_2 l_3 = 0 \right\}$$

とおく．第一成分への射影 $\pi_1 : U \times \mathbf{P}^1 \to U$ の X_1 への制限 $\pi_1 : X_1 \to U$ を I に沿った U の **blow up** と定義する．$E_1 := \pi_1^{-1}(I)$ とおくと，定義より $E_1 = I \times \mathbf{P}^1$ が成立する．E_1 を π_1 の**除外曲面**と呼ぶ．X_1 は次の 2 つの座標近傍系 $\{(U_1^j, \mu_1^j)\}_{j=2,3}$ により $U \times \mathbf{P}^1$ の部分多様体となることがわかる．

$$U_1^2 := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in X_1 \;\middle|\; l_2 \neq 0, \quad x_3 = \frac{l_3}{l_2} x_2 \right\},$$

$$\mu_1^2 : U_1^2 \to \mathbf{C}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \mapsto \left(x_1, x_2, l_3/l_2 \right),$$

$$U_1^3 := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \in X_1 \;\middle|\; l_3 \neq 0, \quad x_2 = \frac{l_2}{l_3} x_3 \right\},$$

$$\mu_1^3 : U_1^3 \to \mathbf{C}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \times [l_2 : l_3] \mapsto \left(x_1, l_2/l_3, x_3 \right).$$

ここで F に次の仮定 $(A.0)$ をおく（図 2 も参照）.

$$\left\{\begin{array}{l}
(1)\ \tilde{F}_1 := F \circ \pi_1 : X_1 \to \mathbf{P}^3 \text{ は } E_1 \text{ のある近傍上正則である.} \\
(2)\ \tilde{F}_1(E_1) \ni p \text{ で, } \{p_1\} = \tilde{F}_1^{-1}(p) \cap E_1 \text{ である. } \pi_1(p_1) = p \text{ とする.} \\
\quad p_1 \in U_1^2 \text{ とし } U_1^2 \text{ の座標を用いて } p_1 := (0,0,a_3^1) \text{ とおく.} \\
(3)\ p_1 \text{ のある開近傍 } N_1 \text{ が存在し } \tilde{F}_1|_{N_1} : N_1 \to \tilde{F}_1(N_1) \text{ は双正則写像である.} \\
(4)\ \tilde{F}_1^{-1}(I) \subset E_1 \cap U_1^2 \text{ である. また, ある定数 } \epsilon_1 > 0 \text{ と } \Delta_{\epsilon_1} \text{ 上で定義された} \\
\quad \text{正則関数 } \psi_1(z_1) \text{ で } \psi_1(0) = a_3^1 \text{ であるものが存在し} \\
\quad \tilde{F}_1^{-1}(I) \supset \{(z_1,z_2,z_3) \in U^2 \mid z_2 = 0,\ z_3 = \psi_1(z_1),\ z_1 \in \Delta_{\epsilon_1}\} \text{ である.} \\
\quad \text{この右辺の集合を } I_1 \text{ とすると } I_1 \ni p_1 \text{ である.}
\end{array}\right.$$

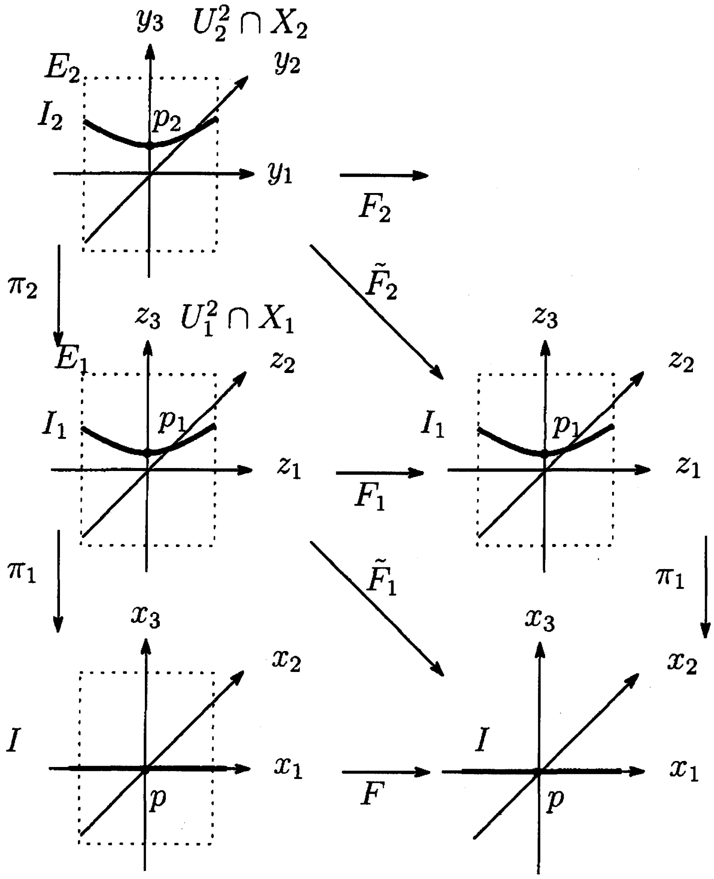

図 2.

Remark. (2) は I の近傍で F の局所最大不変集合 Γ が空集合とならないための条件である．この場合，$I \not\subset \tilde{F}_1(E_1)$ と $I \subset \tilde{F}_1(E_1)$ の 2 つの場合があるが，(4) は $I \subset \tilde{F}_1(E_1)$ を仮定している．このとき

$$\bigcap_N \overline{F(N \setminus I)} \supset I, \quad \text{但し}, N \text{ は } I \text{ の任意の開近傍},$$

が成り立つので，(4) は $\mathbf{P}^2$ の固定的不定点の定義 (*1) を拡張したものであることに注意する．(A.0) は基本的に 2 次元の場合と同様の仮定であるが，(2) と (4) は，

不定集合 I の次元が 1 であることにより，3 次元で新たに必要になった条件である.

このとき，次の Proposition 1 を得る.

Proposition 1. $\tilde{F}_1$ は N_1 上，次の形をしている.

$$\tilde{F}_1 := (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3) = \left(\tilde{f}_1,\ z_2g_2 + (z_3 - \psi_1(z_1))h_2,\ z_2g_3 + (z_3 - \psi_1(z_1))h_3\right),$$

但し $\tilde{f}_i, g_j, h_j$ $(i = 1, 2, 3, j = 1, 2)$ は N_1 上の正則関数であり，任意の $z_1 \in \Delta_{\epsilon_1}$ に対し，次を満たす.

(1) $\dfrac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z_1}(z_1, 0, \psi_1(z_1)) + \dfrac{d\psi_1}{dz_3}(z_1)\tilde{f}_1(z_1, 0, \psi_1(z_1)) \neq 0,$

(2) $(g_2h_3 - g_3h_2)(z_1, 0, \psi_1(z_1)) \neq 0.$

$F_1 := \pi_1^{-1} \circ \tilde{F}_1(z_1, z_2, z_3)$ とおくと $F_1 : N_1 \to X_1$ は有理型写像である．また Proposition 1 より F_1 の不定集合は I_1 であることがわかる.

$N_1 \times \mathbf{P}^1$ の部分集合 X_2 を次の様に定義する.

$$X_2 := \left\{(z_1, z_2, z_3) \times [l_2 : l_3] \in N_1 \times \mathbf{P}^1 \mid z_2l_3 = (z_3 - \psi_1(z_1))\, l_2\right\}.$$

また，第一成分への射影 $\pi_2 : N_1 \times \mathbf{P}^1 \to N_1$ の X_2 への制限を I_1 に沿った N_1 の blow up と呼ぶ．X_2 には X_1 と同様の座標近傍系 $\{(U_2^i, \mu_2^i)\}_{i=2,3}$ を定義することができ，次を得ることができる.

$$\pi_2 : X_2 \cap U_2^2 \to N_1,\quad (y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1, y_2, y_2y_3 + \psi_1(y_1)),$$

$$\pi_2 : X_2 \cap U_2^3 \to N_1,\quad (y_1, y_2, y_3) \mapsto (y_1, (y_3 - \psi_1(y_1))y_2, y_3).$$

更に，次の Proposition 2, 3 を得る.

Proposition 2. $\tilde{F}_2 := F_1 \circ \pi_2 : X_2 \to X_1$ は次の条件を満たす.

(1) $\tilde{F}_2 : X_2 \to X_1$ は E_2 のある開近傍上，正則である.

(2) $\tilde{F}_2(E_2) \ni p_1$ で $\{p_2\} = \tilde{F}_2^{-1}(p_1) \cap E_2$，$\pi_2(p_2) = p_1$ である.

(3) p_2 のある開近傍 N_2 が存在し $\tilde{F}_2|_{N_2} : N_2 \to \tilde{F}_2(N_2)$ は双正則写像.

(4) $\tilde{F}_2^{-1}(I_1) \subset E_2$.

Proposition 3. もし $p_2 \in U_2^2$ のとき，U_2^2 の座標を用いて $p_2 := (0, 0, a_3^2) \in U_2^2$ とおける．このとき，ある定数 $\epsilon_2 > 0$ と Δ_{ϵ_2} 上で定義された正則関数 $\psi_2(y_1)$ で $a_3^2 = \psi_2(0)$ であるものが存在し

$$\tilde{F}_2^{-1}(I_1) \supset \left\{(y_1, y_2, y_3) \in U_2^2 \mid y_2 = 0,\ y_3 = \psi_2(y_1),\ \ y_1 \in \Delta_{\epsilon_2}\right\} \text{ である.}$$

この右辺の集合を I_2 とすると $I_2 \ni p_2$ である．

Proposition 3 より，もし $p_2 \in U_2^2$ なら，I_2 がある正則関数 ψ_2 のグラフとして表されるので，$\pi_2 : X_2 \to N_1$ と同様に I_2 に沿った N_2 の blow up $\pi_3 : X_3 \to N_2$ を定義することができ，点 $p_3 \in E_3$ を得ることが出来る．このようにして，

$$\text{任意の自然数 } n \text{ に対し } p_n \in U_n^2 \cap E_n \cdots (*2)$$

を仮定することにより，点列 $p_{n+1} \in U_{n+1}^2$ を定義することできる．

これより先，$(*2)$ を仮定することで，任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して点列 $\{p_n\}$ と集合列 $\{I_n\}$ が定義されているとし，U_n^2 の座標を用いて $p_n := (0, 0, a_3^n) \in U_n^2 \cap E_n$ とおく．また，ある定数 $\epsilon_{n+1} > 0$ と $\Delta_{\epsilon_{n+1}}$ 上で定義された正則関数 ψ_{n+1} で $\psi_{n+1}(0) = a_3^{n+1}$ を満たすものが存在し，

$$\tilde{F}_n^{-1}(I_n) \supset \left\{(y_1, 0, y_3) \in U_{n+1} \cap E_{n+1} \mid y_3 = \psi_{n+1}(y_1), \quad y_1 \in \Delta_{\epsilon_{n+1}}\right\}$$

である．右辺の集合を I_{n+1} とすると $\tilde{F}^{-1}(I_n) \supset I_{n+1}$ と $I_{n+1} \ni p_{n+1}$ が成り立つ．このようにして，Theorem 2 の拡張である，次の Main Theorem 1 を得ることができる．

Main Theorem 1. 任意の $n \in \mathbf{N}$ と点 p の十分小の近傍 N_n に対して，点 p_n のある開近傍 N_{p_n} が存在し

$$\bigcap_{k \geq 0}^{\infty} F^{-k}(N_n) \cap N_n \subset \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_n(N_{p_n}).$$

正則関数 ψ_n の $y_1 = 0$ でのべき級数展開を $\psi_n(y_1) := \sum_{i \geq 0} a_{in} y_1^i$ とおく．更に ψ_n を用いて 2 変数のべき級数 $\psi(x_1, x_2)$ を次の様に定義する．

$$\psi(x_1, x_2) := \sum_{j \geq 1} \psi_j(x_1) x_2^j = \sum_{i \geq 0,\ j \geq 1} a_{ij} x_1^i x_2^j.$$

一般に $\psi(x_1, x_2)$ は収束べき級数とは限らないが，この先は，$\psi(x_1, x_2)$ の収束域が空集合でないと仮定する．ψ を用いて U の部分集合 V と写像 $\Psi : \Delta_r^2 \to \mathbf{C}^3$ を次の様に定義する．

$$V := \{(x_1, x_2, x_3) \in U \mid x_3 = \psi(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Delta_r^2\},$$

$$\Psi : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, \psi(x_1, x_2)).$$

ただし $\Delta_r^2 := \Delta_r \times \Delta_r$ であり，Δ_r^2 は $\psi(x_1, x_2)$ の収束域に含まれているとする．このとき，次の Main Theorem 2 を得ることができる．

Main Theorem 2.

(1) $V \supset I$.

(2) I のある開近傍 N が存在し，任意の $(x_1, x_2) \in \Delta_r \times \Delta_r^*$ に対し

$$F \circ \Psi(x_1, x_2) \cap N \subset V \text{ と } \lim_{x_2 \to 0} F \circ \Psi(x_1, x_2) \in I$$

が成り立つ．

Example 1. 次の様な有理型写像 $F : \Delta_r \times \mathbf{C}^2 \to \mathbf{P}^3$ を考える．

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1, x_2, \frac{x_3}{x_2} - \psi_1(x_1)\right).$$

但し，$\psi_1(x_1)$ は Δ_r 上の正則関数とし，$x_1 = 0$ でのべき級数展開は $\psi_1(x_1) := \sum_{i=1} a_i x_1^i$ であるとする．この写像は $(A.0)$ の条件を満たしている．また，$(*2)$ も成り立つことから，帰納的に $\tilde{F}_n$, I_n を定義することができる．特に任意の $n \geq 1$ に対し

$$I_n = I_1 = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in U_1^2 \;\middle|\; z_2 = 0, \quad z_3 = \psi_1(z_1)\right\}.$$

が成り立つ．これより，次の形式的べき級数 $\psi(x_1, x_2)$ を用いて定義された集合 V を考える．

$$V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{C}^3 \;\middle|\; x_3 = \psi(x_1, x_2) := \sum_{i \geq 0,\ j \geq 1} a_i x_1^i x_2^j\right\}.$$

この形式的べき級数 $\psi(x_1, x_2)$ の収束域は空でなく，$V \neq \emptyset$ であるので，V は Main Theorem 2 を満たす不変曲面となる．

Example 2. 次の様な $U = \Delta_r \times \mathbf{C}^2$ 上で定義された有理型写像 $F : U \to \mathbf{P}^3$ を考える．

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 + x_1^2 + x_2^2,\ x_2 + x_1 x_2,\ x_2 + \frac{x_3}{x_2} - x_1\right).$$

この写像は $(A.0)$ と $(*2)$ を満たすことから，帰納的に $\tilde{F}_n$, I_n を定義することができ，形式的べき級数 $\psi(x_1, x_2) = \sum_{i \geq 0,\ j \geq 1} a_{ij} x_1^i x_2^j$ を定義することができる．$\psi(x_1, x_2)$ の収束域が空集合でなければ，ψ のグラフ

$$V := \{x_3 = \psi(x_1, x_2)\}$$

は Main Theorem 2 (1) を満たす不変曲面である.

Remark. $\tilde{F}^{-1}(p) \cap E_1 = \{p_1, p_2\}$ の場合，適当な条件を与えれば，2 次元の場合の Theorem 3 と同様に，集合列 $\{I_{j_1 \cdots j_n}\}_{j_k=1,2}$ を用いて，不変曲面の族 $\{V_{\mathrm{j}}\}_{\mathrm{j} \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}}$ を持つ写像を構成することができると予想している.

References

[1] I. R. Shafarevic, *Basic Algebraic Geometry Vols I and II*, Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[2] T. Shinohara, *Another construction of a Cantor bouquet at a fixed indeterminate point*, Kyoto J. Math. 50 (2010), no.1, 205–224.

[3] Y. Yamagishi, *Cantor bouquet of holomorphic stable manifolds for a periodic indeterminate point*, Nonlinearity, 14 (2001), 113–120.

[4] Y. Yamagishi, *On the local convergence of Newton's method*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 55 (2003), 897–908.